

CORSO DI STATICA E SCIENZA DELLE COSTRUZIONI

A.A. 2016-2017

Prova scritta in aula del 06.02.2018

Parte II - Testo I

CdS Edilizia ☐

CdS AdC ☐

CdS SdA ☐

Nota: I risultati numerici vanno riportati a penna su questo stesso foglio, nei riquadri predisposti; i calcoli (in forma ordinata) vanno allegati sui soli fogli a quadretti che sono stati forniti.

Allievo:.....e-mail:..... Matricola:.....

Esercizio n. 1 (17 punti)

Risolvere mediante il Principio dei Lavori Virtuali (PLV) la struttura iperstatica riportata in Figura, assumendo, come incognita iperstatica, il momento flettente sull'appoggio di continuità B , M_B .

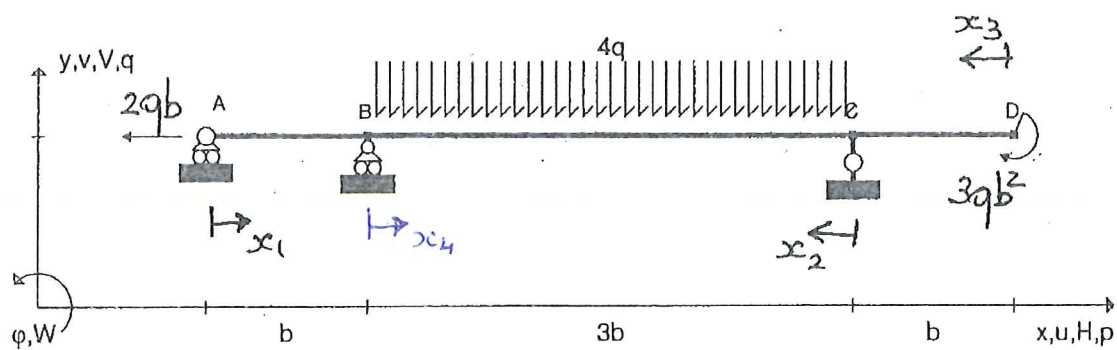
Dopo avere determinato l'iperstatica *tenendo conto solo della deformabilità flessionale*, calcolare le reazioni vincolari, le azioni interne e tracciare nello spazio predisposto nella pagina a fronte i corrispondenti grafici.

Calcolare infine, riapplicando il PLV, lo spostamento verticale del punto D , v_D .

Si rammenta che il diagramma del momento flettente va riportato dalla parte delle fibre tese.

Universita' di Cagliari

SdC_SdA 06.02.18*001



Esercizio n. 2 (7 punti)

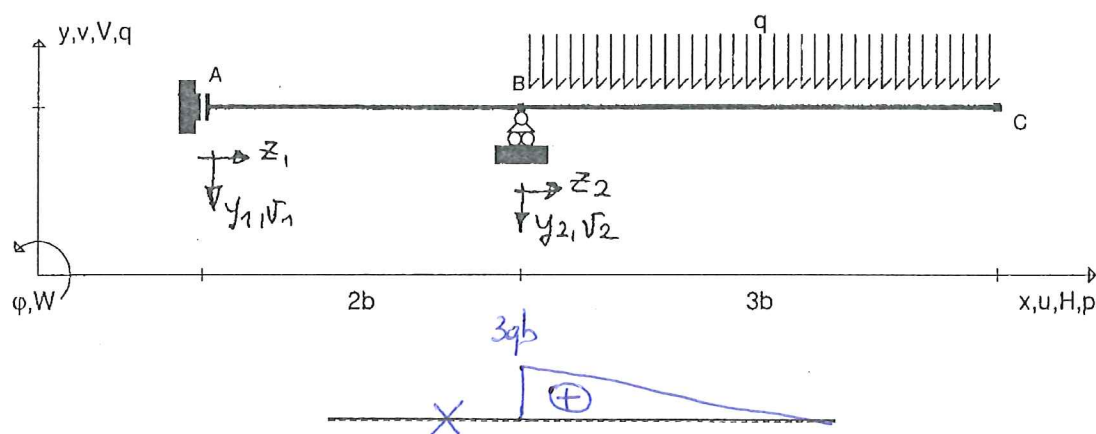
Per la struttura *isostatica*, indicata in Figura, determinare le reazioni vincolari e l'espressione delle azioni interne, nonché le condizioni al contorno imposte dai vincoli nei punti A , B e C .

Utilizzare quindi l'equazione della linea elastica per determinare:

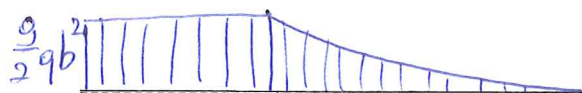
1. La deformata della linea d'asse, $v(z) = v_1(z_1) \cup v_2(z_2)$;
2. La sua derivata prima, $v'(z) = v_1'(z_1) \cup v_2'(z_2)$;
3. Lo spostamento verticale del punto A , v_A ;
4. La rotazione del punto C , θ_C .

Università di Cagliari

SdC_SdA 06.02.18*001



$\uparrow \oplus \downarrow$



$\curvearrowright \oplus \curvearrowleft$

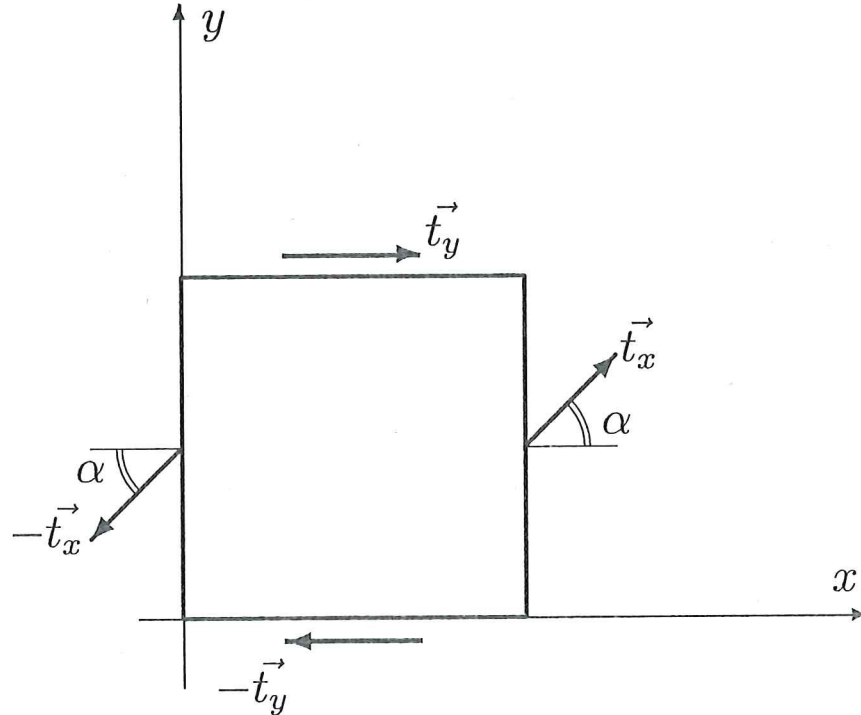
$H_A (\Rightarrow) = \dots 0 \dots$			$M_A (\curvearrowright) = \dots + \frac{9}{2} qb^2 \dots$			$V_B (\uparrow) = \dots 3qb \dots$		
$N_{AB} = \dots 0 \dots$			$T_{AB} = \dots 0 \dots$			$M_{AB} = \dots - \frac{9}{2} qb^2 \dots$		
$N_{BC} = \dots 0 \dots$			$T_{BC} = \dots 3qb - qz_2 \dots$			$M_{BC} = \dots - \frac{9}{2} qb^2 + 3qbz_2 - \frac{1}{2} qz_2^2 \dots$		
$\text{c.c in } A = \dots v_1'(z_1=0) = 0 \dots$			$\text{c.c in } B = \dots \int v_1'(z_1=2b) = v_2'(z_2=0) = 0 \dots$			$\int v_1'(z_1=2b) = v_2'(z_2=0) \dots$		
$\text{c.c in } C = \dots \parallel \dots$								
$v_1(z_1) = \dots - \frac{9qb^4}{8EI} + \frac{9qb^2z_1^2}{4EI} \dots$			$v_1'(z_1) = \dots \frac{9qb^2z_1}{2EI} \dots$					
$v_2(z_2) = \dots \frac{9qb^3z_2}{8EI} + \frac{9qb^2z_2^2}{4EI} - \frac{1}{2} \frac{qbz_2^3}{EI} + \frac{qz_2^4}{24EI} \dots$			$v_2'(z_2) = \dots \frac{9qb^3}{8EI} + \frac{9qb^2z_2}{2EI} - \frac{3}{2} \frac{qbz_2^2}{EI} + \frac{1}{6} \frac{qz_2^3}{EI} \dots$					
$v_A = \dots - \frac{9qb^4}{8EI} (\uparrow) \dots$			$\theta_C = \dots + \frac{27}{2} \frac{qb^3}{EI} (\curvearrowright) \dots$					

Esercizio n. 3 (9 punti)

Un elemento di materiale *in condizioni di equilibrio* è soggetto lungo le facce aventi come normali gli assi x e y ai vettori sforzo (piani) \vec{t}_x e \vec{t}_y rispettivamente; di questi \vec{t}_x è inclinato rispetto all'asse x di un angolo $\alpha = 30^\circ$ (sicché $\sin \alpha = 1/2$; $\cos \alpha = \sqrt{3}/2$) e ha modulo di valore $|\vec{t}_x| = 70\sqrt{3}$ MPa. L'altro vettore sforzo, \vec{t}_y , è invece *orizzontale*, come indicato in Figura.

Si chiede di determinare le componenti σ_x , σ_y e τ_{xy} del tensore degli sforzi, costruire il cerchio di Mohr, determinare gli sforzi principali, σ_1 e σ_2 , e la massima tensione tangenziale, τ_{max} .

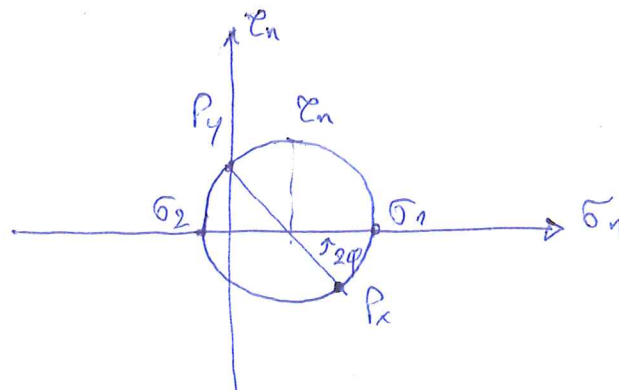
Determinare inoltre quanto vale l'angolo φ formato dall'asse x e dall'asse normale alla faccia sulla quale agisce lo sforzo principale massimo, σ_1 .



$$\sigma_x = 105.0000 \text{ (MPa)}; \sigma_y = 0.0000 \text{ (MPa)}; \tau_{xy} = 60.6218 \text{ (MPa)};$$

$$\sigma_1 = 132.6951 \text{ (MPa)}; \sigma_2 = -27.6951 \text{ (MPa)}; \tau_{max} = 80.1951 \text{ (MPa)};$$

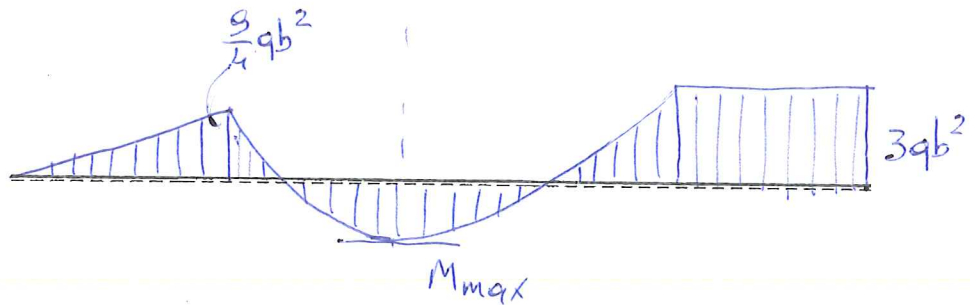
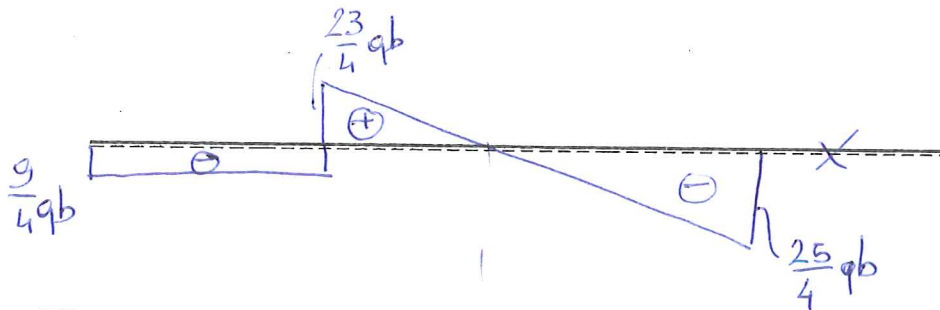
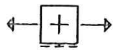
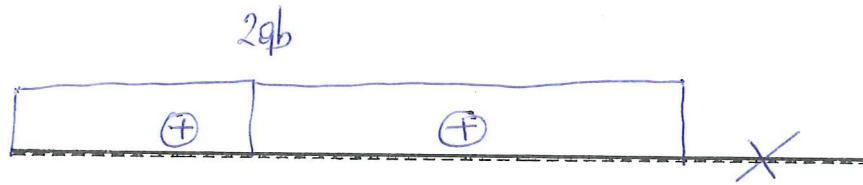
cerchio di Mohr:



$$P_x = (105, -60.62)$$

$$P_y = (0, +60.62)$$

$$\varphi = 24.5533 \text{ (}^\circ\text{)};$$



$V_A (\uparrow) = -\frac{9}{4}qb$	$V_B (\uparrow) = 8qb$	$H_C (\Rightarrow) = 2qb$	$V_C (\uparrow) = \frac{25}{4}qb$	$M_B (\curvearrowright) = -\frac{9}{4}qb^2$
$N_{AB} = 2qb$	$T_{AB} = -\frac{9}{4}qb$	$M_{AB} = -\frac{9}{4}qb^2$		
$N_{CB} = 2qb$	$T_{CB} = \begin{cases} -\frac{25}{4}qb + 4qx_2 \\ \frac{23}{4}qb - 4qx_4 \end{cases}$	$M_{CB} = \begin{cases} -3qb^2 + \frac{25}{4}qb x_2 - 2qx_2^2 \\ -\frac{9}{4}qb^2 + \frac{23}{4}qb x_4 - 2qx_4^2 \end{cases}$		
$N_{DC} = 0$	$T_{DC} = 0$	$M_{DC} = -3qb^2$		
$v_D = -\frac{9}{8}\frac{qb^4}{EI} \quad (4)$				

CORSO DI STATICA E SCIENZA DELLE COSTRUZIONI

A.A. 2016-2017

Prova scritta in aula del 06.02.2018

Parte II - Testo 2

CdS Edilizia ☐

CdS AdC ☐

CdS SdA ☐

Nota: I risultati numerici vanno riportati a penna su questo stesso foglio, nei riquadri predisposti; i calcoli (in forma ordinata) vanno allegati sui soli fogli a quadretti che sono stati forniti.

Allievo:.....e-mail:..... Matricola:.....

Esercizio n. 1 (17 punti)

Risolvere mediante il Principio dei Lavori Virtuali (PLV) la struttura iperstatica riportata in Figura, assumendo, come incognita iperstatica, il momento flettente sull'appoggio di continuità B , M_B .

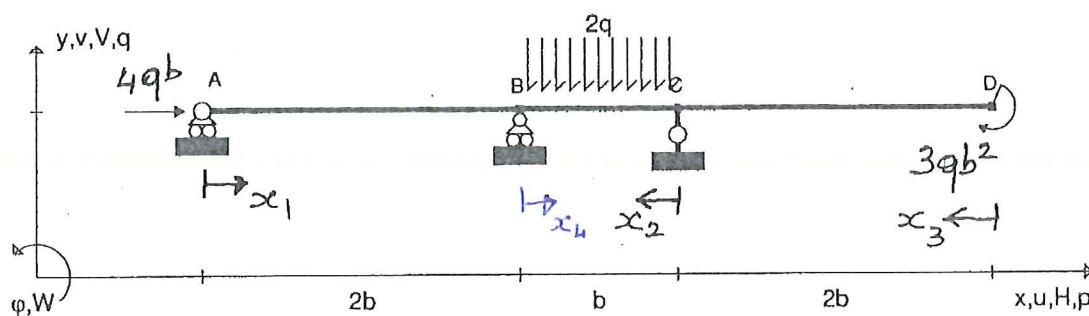
Dopo avere determinato l'iperstatica *tenendo conto solo della deformabilità flessionale*, calcolare le reazioni vincolari, le azioni interne e tracciare nello spazio predisposto nella pagina a fronte i corrispondenti grafici.

Calcolare infine, riapplicando il PLV, lo spostamento verticale del punto D , v_D .

Si rammenta che il diagramma del momento flettente va riportato dalla parte delle fibre tese.

Universita' di Cagliari

SdC_SdA 06.02.18*002



Esercizio n. 2 (7 punti)

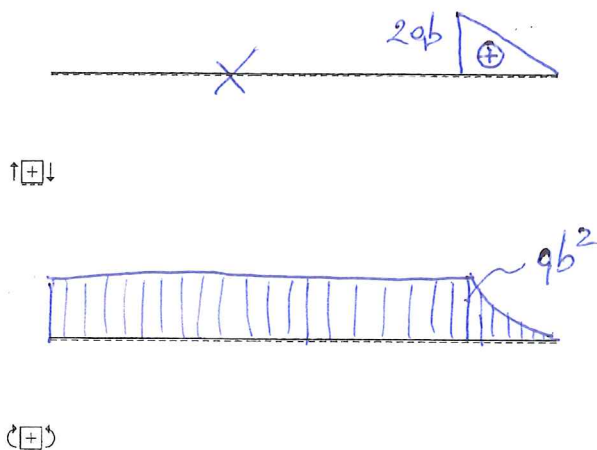
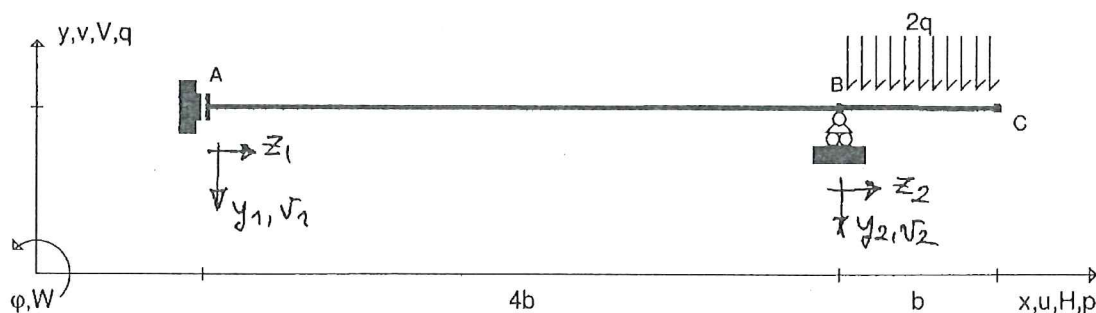
Per la struttura *isostatica*, indicata in Figura, determinare le reazioni vincolari e l'espressione delle azioni interne, nonché le condizioni al contorno imposte dai vincoli nei punti A , B e C .

Utilizzare quindi l'equazione della linea elastica per determinare:

1. La deformata della linea d'asse, $v(z) = v_1(z_1) \cup v_2(z_2)$;
2. La sua derivata prima, $v'(z) = v'_1(z_1) \cup v'_2(z_2)$;
3. Lo spostamento verticale del punto A , v_A ;
4. La rotazione del punto C , θ_C .

Universita' di Cagliari

SdC_SdA 06.02.18*002



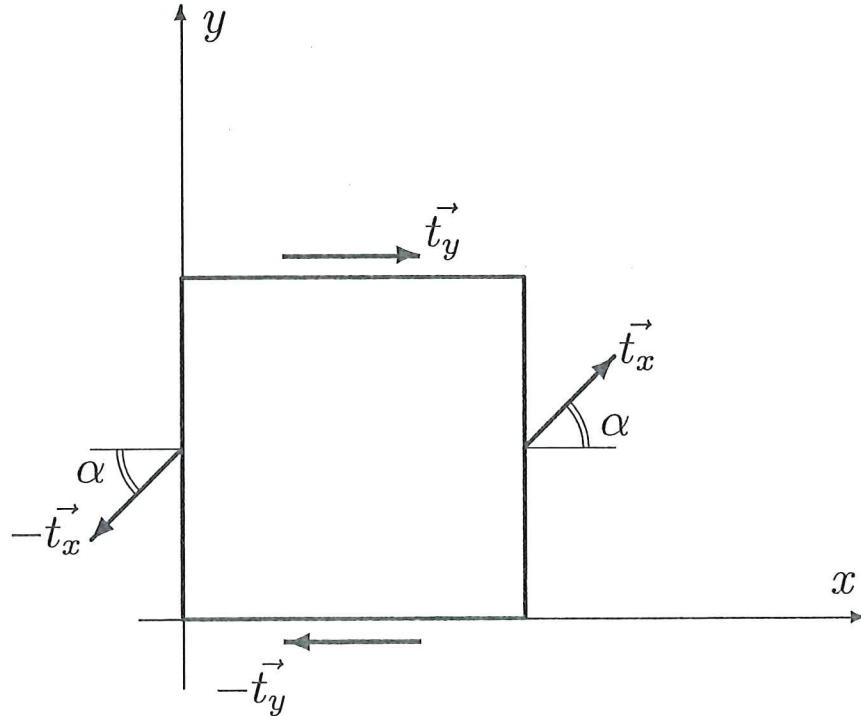
$$\begin{aligned}
 H_A (\Rightarrow) &= 0; M_A (\curvearrowright) = qb^2; V_B (\uparrow) = 2qb; \\
 N_{AB} &= 0; T_{AB} = 0; M_{AB} = -qb^2; \\
 N_{BC} &= 0; T_{BC} = 2b - 2qz_2; M_{BC} = -qb^2 + 2qbz_2 - qz_2^2; \\
 \text{c.c in } A &= v_1'(z_1=0) = 0; \text{c.c in } B = \begin{cases} v_1(z_1=4b) = v_2(z_2=0) = 0 \\ v_1'(z_1=4b) = v_2'(z_2=0) \end{cases}; \\
 \text{c.c in } C &= //; \\
 v_1(z_1) &= -\frac{8qb^4}{EI} + \frac{1}{2} \frac{qb^2 z_1^2}{EI}; v_1'(z_1) = \frac{qb^2 z_1}{EI}; \\
 v_2(z_2) &= \frac{4}{EI} qb^3 z_2 + \frac{1}{2} \frac{qb^2 z_2^2}{EI} - \frac{1}{3} \frac{qb z_2^3}{EI} + \frac{1}{12} \frac{q z_2^4}{EI}; v_2'(z_2) = \frac{4}{EI} qb^3 + \frac{qb^2 z_2}{EI} - \frac{qb z_2^2}{EI} + \frac{1}{3} \frac{q z_2^3}{EI}; \\
 v_A &= -\frac{8}{EI} qb^4 (\uparrow); \theta_C = +\frac{13}{3} \frac{qb^3}{EI} (\curvearrowright);
 \end{aligned}$$

Esercizio n. 3 (9 punti)

Un elemento di materiale *in condizioni di equilibrio* è soggetto lungo le facce aventi come normali gli assi x e y ai vettori sforzo (piani) \vec{t}_x e \vec{t}_y rispettivamente; di questi \vec{t}_x è inclinato rispetto all'asse x di un angolo $\alpha = 30^\circ$ (sicché $\sin \alpha = 1/2$; $\cos \alpha = \sqrt{3}/2$) e ha modulo di valore $|\vec{t}_x| = 90\sqrt{3}$ MPa. L'altro vettore sforzo, \vec{t}_y , è invece *orizzontale*, come indicato in Figura.

Si chiede di determinare le componenti σ_x , σ_y e τ_{xy} del tensore degli sforzi, costruire il cerchio di Mohr, determinare gli sforzi principali, σ_1 e σ_2 , e la massima tensione tangenziale, τ_{max} .

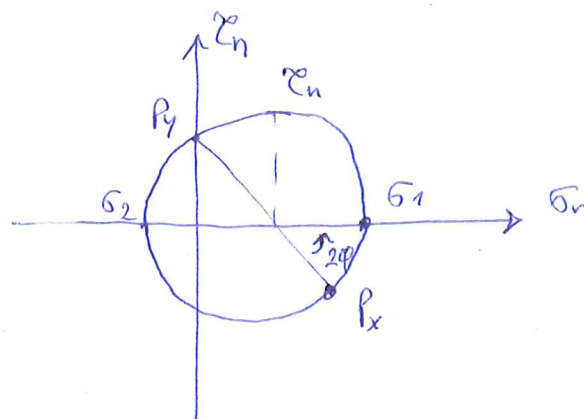
Determinare inoltre quanto vale l'angolo φ formato dall'asse x e dall'asse normale alla faccia sulla quale agisce lo sforzo principale massimo, σ_1 .



$$\sigma_x = 135.0000 \text{ (MPa)}; \sigma_y = 0.0000 \text{ (MPa)}; \tau_{xy} = 77.9423 \text{ (MPa)};$$

$$\sigma_1 = 170.6080 \text{ (MPa)}; \sigma_2 = -35.6080 \text{ (MPa)}; \tau_{max} = 103.1080 \text{ (MPa)};$$

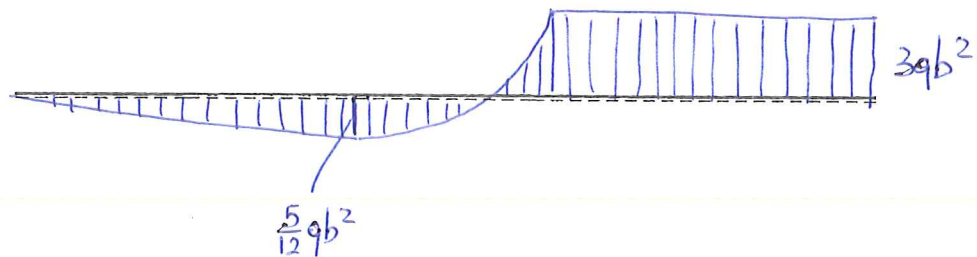
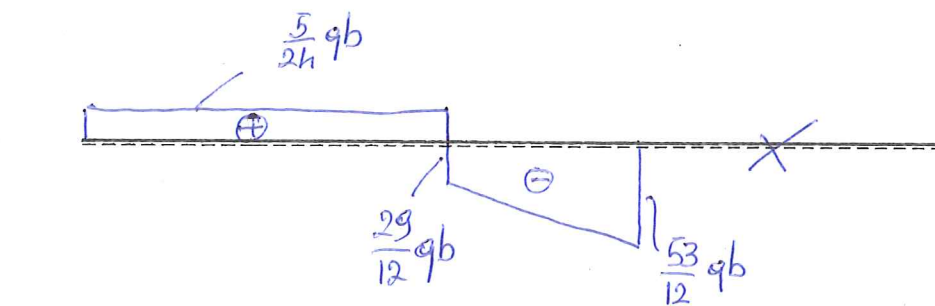
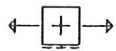
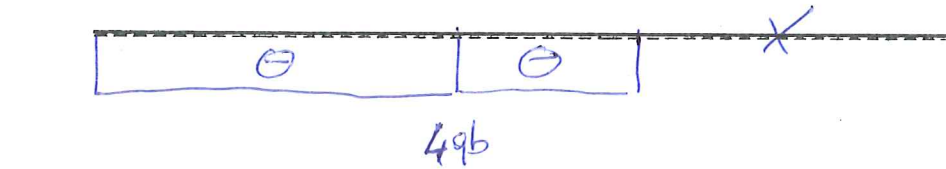
cerchio di Mohr:



$$P_x = (135, -77.94)$$

$$P_y = (0, +77.94)$$

$$\varphi = 24.5533 \text{ (}^\circ\text{)};$$



$V_A(\uparrow) = \frac{5}{24}qb$	$V_B(\uparrow) = -\frac{21}{8}qb$	$H_C(\Rightarrow) = -4qb$	$V_C(\uparrow) = \frac{53}{12}qb$	$M_B(\curvearrowright) = \frac{5}{12}qb^2$
$N_{AB} = -4qb$	$T_{AB} = \frac{5}{24}qb$		$M_{AB} = \frac{5}{24}qb^2$	
$N_{CB} = -4qb$	$T_{CB} = \int_{-2b}^0 \left(-\frac{53}{12}qb + 2qx_2 \right) dx_2$		$M_{CB} = \int_{-2b}^0 \left(\frac{5}{12}qb^2 - \frac{23}{12}qb x_2 - qx_2^2 \right) dx_2$	
$N_{DC} = 0$	$T_{DC} = 0$		$M_{DC} = -3qb^2$	
$v_D = -\frac{277}{36} \frac{qb^4}{EI}$				